

# ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ С СОСТАВНЫМИ ВЕТВЯМИ

Гочуа К.В.<sup>1</sup>, Драбкин И.А.<sup>2</sup>, Ершова Л.Б.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский Государственный Институт Стали и Сплавов, Москва

<sup>2</sup>Институт химических проблем микроэлектроники, Москва

<sup>3</sup>ЗАО РМТ, Москва

E-mail: Igor@Ng2449.spb.edu

При конструировании термоэлектрических генераторов использование составных ветвей, т.е. ветвей состоящих из материалов, оптимизированных для работы в различных температурных интервалах, является обычной практикой. Такие модули имеют меньшие тепловые потери по сравнению с каскадными модулями, в которых неизбежно присутствуют потери на тепловых переходах между каскадами. Однако расчеты таких модулей с составными ветвями более сложны, чем расчеты каскадных модулей. Обычно модули рассчитываются из условий максимума КПД при фиксированных температурах холодного и горячего концов ветви. Такие задачи относятся к задачам оптимального управления, и их удобно решать используя принцип максимума Понтрягина [1]. Этот метод успешно применялся для оптимизации различного вида холодильных модулей [2] и каскадных генераторов [3]. В данной работе рассматривается оптимизация генераторного модуля с составными ветвями.

Рассмотрим генератор с ветвями, составленными из различных термоэлектрических материалов. Схема такой ветви приведена на рис. 1.

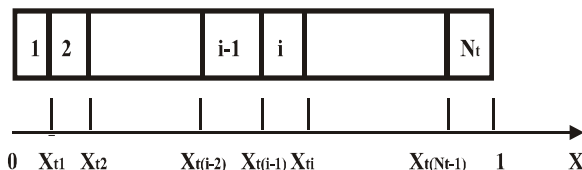


Рис. 1. Схема составной ветви термоэлемента.

Пусть  $p$ -ветвь состоит из  $N_p$  элементов, а  $n$ -ветви из  $N_n$  элементов, соответственно. Значение  $N_p$  может, вообще говоря, отличаться от  $N_n$ . В дальнейшем мы будем обозначать все величины, относящиеся к какому либо элементу составной ветви двумя индексами: первый индекс относится к типу проводимости, второй к порядковому номеру элемента. Термоэлектрические параметры будем обозначать:  $\alpha$  - термоэдс,  $\sigma$  -

электропроводность,  $\kappa$  – теплопроводность. Температуры, относящиеся к концам  $i$  и  $i+1$  составных элементов, в точке  $X_{ii}$ , если они лежат справа от этой точки будем обозначать как  $T(X_{ii}+0)$ , а слева -  $T(X_{ii}-0)$ . Если на стыке составных элементов имеются тепловые потери, например, на припое, соединяющем элементы, то предел справа будет отличаться от предела слева. Уравнение теплопроводности для  $i$  – имеет вид:

$$\nabla(\kappa_{ii} \nabla T_{ii}) + (j, j) \rho_{ii} - T_{ii} (j, \nabla \alpha_{ii}) = 0, \quad t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t, \quad (1)$$

где  $j$  – плотность тока в ветвях. Будем рассматривать задачу в одномерном приближении. Тогда вектор тока мы можем рассматривать как скаляр. Условимся в дальнейшем всегда считать плотность тока и теплового потока положительной величиной, изменив соответствующим образом знаки в (1). Так как направление тока в п- и р-ветвях противоположны, то величина  $\alpha j$  не меняет знак, но т.к. мы условились считать  $j > 0$ , то в дальнейшем будем подразумевать, что коэффициент термоэдс равен  $|\alpha|$ . В этом случае, заменяя уравнение (1) системой уравнений первого порядка, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{ii}}{\partial x} = -\frac{j \alpha_{ii} T_{ii}}{\kappa_{ii}} + \frac{q_{ii} j}{\kappa_{ii}} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{j \alpha_{ii}^2}{\kappa_{ii}} T_{ii} + \frac{j \alpha_{ii}}{\kappa_{ii}} q_{ii} - j \rho_{ii} \end{cases}, \quad t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t, \quad (2)$$

где

$$q_{ii} = \frac{\left( \kappa_{ii} \frac{\partial T_{ii}}{\partial x} + T_{ii} j \alpha_{ii} \right)}{j} \quad (3)$$

есть плотность теплового потока, отнесенная к плотности тока.

Система (2) решается при следующих граничных условиях: температура холодного конца ветви  $T_{i1}(0) = T_c$ , температура горячего конца  $T_{iN_t}(1) = T_h$ , а на стыке элементов ветви  $T_{i(i-1)}(x_{i(i-1)} - 0) = T_{ii}(x_{i(i-1)} + 0) - \delta_{ii}$ , где символом  $\delta_{ii}$  обозначены температурные потери на стыках. Кроме того  $q_{i(i-1)}(x_{i(i-1)} - 0) = q_{ii}(x_{i(i-1)} + 0)$ . Таким образом решение системы (2) сводится к задаче Коши, для решения которой имеются стандартные программы.

Гамильтониан [1] системы (2) является суммой Гамильтонианов для всех элементов:

$$H = \sum_{\substack{t=n,p \\ i_i=1..N_t}} H_{ii} = \sum_{\substack{t=n,p \\ i_i=1..N}} \left[ \psi_{1i_i} \left( \frac{j}{\kappa_{i_i}} q_{i_i} - \frac{j\alpha_{i_i} T_t}{\kappa_{i_i}} \right) + \psi_{2i_i} \left( -\frac{j}{\sigma_{i_i}} + \alpha_{i_i} \frac{j}{\kappa_{i_i}} q_{i_i} - \frac{j(\alpha_{i_i})^2 T_t}{\kappa_{i_i}} \right) \right], \quad (4)$$

где  $\psi_{1i_i}$  и  $\psi_{2i_i}$  - переменные, сопряженные [1] с  $T$  и  $q$ . Система уравнений для сопряженных величин есть

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_{1i_i}}{\partial t} = \psi_{1i_i} \frac{j\alpha_{i_i}}{\kappa_{i_i}} R_{1i_i} + \psi_{2i_i} \frac{j\alpha_{i_i}^2}{\kappa_{i_i}} R_{2i_i} \\ \frac{\partial \psi_{2i_i}}{\partial t} = \frac{j}{\kappa_{i_i}} \psi_{1i_i} - \frac{j\alpha_{i_i}}{\kappa_{i_i}} \psi_{2i_i} \end{cases}, \quad t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t \quad (5)$$

Где в соответствии с [2] введены обозначения

$$R_{1i_i} = \left( 1 + T_t \frac{d \ln \alpha_{i_i}}{dT_t} - \frac{d \ln \kappa_{i_i}}{dT_t} \left( T_t - \frac{q_{i_i}}{\alpha_{i_i}} \right) \right), \quad (6)$$

$$R_{2i_i} = R_{1i_i} + \frac{d \ln \alpha_{i_i}}{dT_t} \left( T_t - \frac{q_{i_i}}{\alpha_{i_i}} \right) - \frac{1}{Z_{i_i}} \frac{d \ln \sigma_{i_i}}{dT_t} \quad \text{и} \quad (7)$$

$$Z_{i_i} = \frac{\alpha_{i_i}^2 \sigma_{i_i}}{\kappa_{i_i}}. \quad (8)$$

Максимум КПД ветви достигается тогда, когда каждый элемент работает в режиме максимального КПД. Вследствие этого, для оптимизации решения необходимо обеспечить минимум функционала

$$J = \sum_{t=n,p} \ln \left( \frac{q_{tN_t} (1-0) q_{t1} (x_1-0) q_{t2} (x_2-0) \dots q_{tN_t} (x_{t(N_t-1)}-0)}{q_{t1} (0+0) q_{t2} (x_2+0) q_{t3} (x_3+0) \dots q_{tN_t} (x_{t(N_t-1)}+0)} \right). \quad (9)$$

Учитывая наложенные граничные условия для уравнения (2) обобщенный функционал  $\bar{J}$  можно записать как

$$\begin{aligned} \bar{J} = & J + \sum_{t=n,p} \lambda_{1t} (T_{1t} (0+0) - T_c) + \sum_{t=n,p} \lambda_{2t} (T_{N_t} (1-0) - T_h) + \\ & + \sum_{\substack{t=n,p \\ i_i=1..N_t}} \left[ \lambda_{3i_i} (T_{i(i-1)} (x_{i(i-1)}-0) - T_{ii} (x_{i(i-1)}+0) + \delta_{ii}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Условия трансверсальности [2] дают граничные условия для системы [5].

$$\psi_{2t}(x_{ti}) = -\frac{1}{q_{ti}(x_{ti})}, t = n, p, i = 1, \dots, N_t,$$

$$\psi_{1t(i-1)}(x_{t(i-1)} - 0) = \psi_{1t_i}(x_{t(i-1)} + 0), t = p, i = 1, 2, \dots, N_p; t = n, i = 1, 2, \dots, N_n. \quad (11)$$

Оптимальный ток через ветви  $j_{opt}$  можно записать как

$$j_{opt} = \frac{\sum_{\substack{t=n,p \\ i=1,\dots,N_t}} \psi_{2t_i} \alpha_{t_i} T_i \Big|_{(x_{ini})_{t_i}}^{(x_{end})_{t_i}}}{\sum_{\substack{t=n,p \\ i=1,\dots,N_t}} \int_{(x_{ini})_{t_i}}^{(x_{end})_{t_i}} \left[ \left( \frac{\psi_{2t_i}}{\sigma_{t_i}} (1 - Z_{t_i} T_t) - \frac{q_{t_i} \psi_{1t_i}}{\kappa_{t_i}} \right) + \frac{\psi_{2t_i} T_t}{\kappa_{t_i}} \frac{d\alpha_{t_i}}{dT_t} (q_{t_i} - \alpha_{t_i} T_t) \right] dx}, \quad (12)$$

где символы  $(x_{ini})_{t_i}$  и  $(x_{end})_{t_i}$  обозначают начало и конец соответствующего элемента. При  $N_p = N_n = 1$  и термоэлектрических параметрах, не зависящих от температуры, выражение (12) переходит в хорошо известное уравнение  $j_{opt} = \frac{\alpha \sigma (T_h - T_c)}{1 + \sqrt{1 + Z(T_h - T_c)}/2}$  [4].

Алгоритм нахождения оптимальных длин элементов ветви заключается в следующем. Берем какое то начальное распределение длин элементов, в нулевом приближении считаем распределение температур линейным и заменяем термоэлектрические коэффициенты в элементах ветви их средними значениями, после этого рассчитываем величины  $j^{(0)}$  и  $q_{t_1}(0)^{(0)}$   $t = n, p$ . Затем решаем систему (2) и изменением  $q_{t_1}(0)$  добиваемся удовлетворения граничных условий  $T_{t_{N_t}} = T_h, t = n, p$ . После нахождения распределения температур с помощью (11) определяем граничные условия для  $\psi_{2t_i}, t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t$ , решаем систему (5) и определяем величины  $\psi_{1t_i}, t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t$ . Затем рассчитываем в первом приближении  $j^{(1)}$ , используя (12). Так как величины  $\psi_{1t_i}, t = n, p; i = 1, 2, \dots, N_t$  не удовлетворяют условию (11), то изменяем величины  $x_{t_i}, t = n, p; i = 1, 2, \dots, (N-1)_t$  так, чтобы удовлетворить (11),

аппроксимируя зависимость  $\psi_{l_i}(x)$  линейным законом и находим распределение длин элементов ветви уже в первом приближении. После этого с новым током и новым распределением длин элементов решаем (12) и повторяем процедуру, описанную выше до тех пор, пока изменение кпд не станут меньше некоторой наперед заданной малой величины.

ЭДС термоэлемента рассчитывается как

$$E = \sum_{\substack{t=n,p \\ i=1,\dots,N_t}} \int_{x_{t(i-1)}}^{x_{ti}} \alpha(T_i) \frac{dT_i}{dx_i} dx_i. \quad (13)$$

А внутренне сопротивление

$$R = \sum_{\substack{t=n,p \\ i=1,\dots,N_t}} \int_{x_{t(i-1)}}^{x_{ti}} \rho(T_i) \frac{dx_i}{dT_i} dT_i \quad (14)$$

Если сечения элементов неодинаковы, то процедура получения решения выглядит проще, т.к. в этом случае нет необходимости устанавливать распределение элементов по длинам, и задача может решаться для единичной длины каждого элемента и решение может преобразовываться к нужной форме, используя геометрический фактор элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понtryгин Л.С., Болтынский В.Г., Гамкрелидзе З.И., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, «Наука», 1983 г.
2. Анатычук Л.И., Семенюк В.А., Оптимальное управление, Чернівцы, «Прут», 1992.
3. Вихор Л. Н. Термоэлектричество, №2, стр. 62-70, 2005 г.
4. Охотин А.С., Ефремов А.А., Охотин В.С., Пушкарский А.С. Термоэлектрические генераторы, Москва, «Атомиздат», 1971 г.