СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКАСКАДНЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ

Драбкин И.А.[1], Ершова Л.Б.[2]

[1] Институт Химических Проблем Микроэлектроники, Москва, Россия
[2] ЗАО «РМТ», Москва, Россия
тел: +7-495-132-6817 факс: +7-495-132-5870
e-mail: rmtcom@dol.ru

В предыдущей работе [1] было проведено сравнение результатов расчета холодильного коэффициента однокаскадного термоэлектрического модуля с учетом температурных зависимостей термоэлектрических параметров методом максимума Понтрягина (МП) [2] и методом эффективных параметров (ЭП) [3] и показано, что оба этих метода дают близкие результаты. Применение ЭП для многокаскадных модулей в первом приближении было осуществлено в работе [4]. В настоящей работе метод ЭП рассмотрен строго и проведено сравнение двух методов для многокаскадных модулей.

Для однокаскадных модулей, если заданы температуры горячей и холодной стороны ветви, задача сводится к нахождению оптимальной плотности тока j_{opt} (под j_{opt} будем понимать ток, умноженный на геометрический фактор l/s, где l - длина, а s - сечение ветви). Для многокаскадных модулей необходимо найти не только оптимальные плотности тока для каждого каскада $j_{opt}^{(k)}$ (k - номер каскада, здесь, $k = 1...N$, где N - число каскадов), но и оптимальное распределение температур по каскадам.

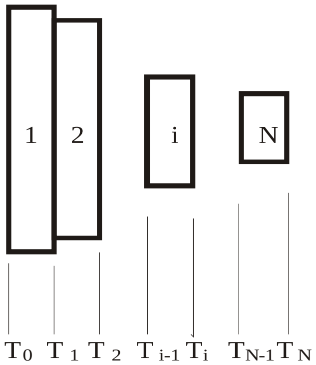

Рис 1. Нумерация каскадов и обозначение их температур многокаскадного модуля

Нумерация каскадов и обозначения температур каскадов следуют из рис. 1.

Все выражения, приводимые в работе [1], справедливы для каждого каскада многокаскадного модуля. Знак типа проводимости ветви будем указывать первым индексом снизу, который принимает два значения n или p.

Методом МП оптимальная последовательность температур многокаскадного модуля находится из условия равенства на границах каскадов переменной ψ, сопряженной с температурой Т [2]:

$$\psi_{nT}^{(k)} + \psi_{pT}^{(k)} = \psi_{nT}^{(k+1)} + \psi_{pT}^{(k+1)}, \qquad k = 1...N-1 \qquad (1)$$

Решение системы (1) создает основные трудности при отыскании оптимума методом МП.

В методе ЭП необходимо решить систему уравнений для тепловых коэффициентов $\mu^{(k)}$ [4]:

$$\mu^{(k)} \frac{\partial \mu^{(k+1)}}{\partial T_k} + \mu^{(k+1)} \frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_k} = 0, \quad k = 1...N-1, \qquad (2)$$

которая непосредственно следует из условия минимума теплового коэффициента модуля. Сложности решения системы (2) приблизительно такие же, как и решения системы (1). В данной работе, не останавливаясь на методах решения системы (1), рассмотренных, например, в работе [2], сосредоточимся на таковых для системы (2).

Прежде всего, отметим, что решение системы (2) возможно, только если каким-либо образом заданы плотности токов в каскадах. Способ нахождения плотностей токов ясен из работы [1], если задать какое-либо предварительное распределение температур. Заметим, что выражение для оптимальных плотностей токов в методе ЭП зависит от средних по ветви значений термоэлектрических параметров, просуммированных по типам проводимости, и эффективной температуры T_{eff}, которая уже зависит от значений термоэдс α и удельного сопротивления ρ на обоих концах ветви. Если обозначить $\rho_c = \bar{\rho} - \delta_\rho$ и $\alpha_c = \bar{\alpha} - \delta_a$, где индекс c указывает на «холодный» (теплопоглощающий) конец ветви, а чертой сверху обозначено среднее по ветви, то из соотношений между термоэлектрическими параметрами на «холодном» и «горячем» концах ветви [1] следует, что $\rho_h = \bar{\rho} + \delta_\rho$ и $\alpha_h = \bar{\alpha} - \delta_a \frac{T_c}{T_h}$, где индекс h указывает на горячий конец ветви. Эти соотношения позволяют получить для T_{eff} следующее выражение:

$$T_{eff} = T_{av} - \frac{\delta_\rho}{\bar{\rho}} \frac{(T_h - T_c)}{2} - T_c \frac{\delta_\alpha}{\bar{\alpha}} = T_{av} - \delta T, \qquad (3)$$

где $T_{av} = \dfrac{T_h + T_c}{2}$. При использовании ветви из термоэлектрических материалов на основе халькогенидов сурьмы-висмута отличие T_{av} от T_{eff} составляет не более процента, поэтому соотношение (3) может быть использовано на первоначальных стадиях расчета методом последовательных приближений для нахождения оптимальной последовательности температур. Использование (3) в оценке для оптимальной плотности тока приводит также к погрешности в ее определении около одного процента. На окончательных стадиях расчета методом последовательных приближений можно пользоваться точными выражениями для T_{eff} .

Пусть T_k некоторая приближенная последовательность температур на каскадах. В качестве таковой можно, например, использовать последовательность, получаемую в [4]. Пусть далее точная последовательность температур на каскадах есть $T_{pr}^{(k)}$, так что

$$T_k = T_{pr}^{(k)} + \delta^{(k)}. \qquad (4)$$

Считая добавку $\delta^{(k)}$ малой величиной, разлагая $\mu^{(k)}$ и $\dfrac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_k}$ в ряд в окрестности точки $T_{pr}^{(k)}$ и, ограничиваясь только линейными по $\delta^{(k)}$ добавками, можно получить следующую систему уравнений для нахождения $\delta^{(k)}$:

$$\delta^{(k-1)}\left(\mu^{(k+1)}\frac{\partial^2 \mu^{(k-1)}}{\partial T_k \partial T_k} + \frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_k}\frac{\partial \mu^{(k+1)}}{\partial T_k}\right) + \delta^{(k)}$$
$$\left(2\frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_k}\frac{\partial \mu^{(k+1)}}{\partial T_k} + \mu^{(k+1)}\frac{\partial^2 \mu^{(k)}}{\partial^2 T_k} + \mu^{(k)}\frac{\partial^2 \mu^{(k+1)}}{\partial^2 T_k}\right) + \qquad (5)$$
$$+\delta^{(k+1)}\left(\frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_i}\frac{\partial \mu^{(k+1)}}{\partial T_{i+1}} + \mu^{(k)}\frac{\partial^2 \mu^{(k+1)}}{\partial T_i \partial T_{i+1}}\right) = \mu^{(k+1)}\frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_i} + \mu^{(k)}\frac{\partial \mu^{(k+1)}}{\partial T_i},$$

причем $k = 1 \ldots N-1$, $\delta^{(0)} = 0$ и $\delta^{(N)} = 0$.

Как и в случае однокаскадного модуля [1], нахождению оптимальных величин предшествует решение уравнения теплопроводности для каждого каскада. Это дает возможность рассчитывать значения тепловых коэффициентов из его решения и определять значения производных в (5) как $\dfrac{\partial \mu^{(k)}}{\partial T_k} = \dfrac{\Delta \mu^{(k)}}{\Delta T_k}$. Систему (5) можно легко решить относительно $\delta^{(k)}$ методом последовательных приближений. Беря какие-либо пробные значения T_k, вычисляем с использованием этих значений оптимальные токи и находим соответствующие $\delta^{(k)}$, затем находим новые значения T_k и повторяем описанную процедуру до достижения необходимой точности. Конечно, разложение, использованное в (5) может оказаться и несправедливым. В этом случае метод последовательных приближений будет расходиться, однако для обычных термоэлектрических материалов на основе халькогенидов Bi-Sb сходимость достигается довольно быстро.

В расчетах многокаскадных модулей использовались те же аппроксимации термоэлектрических функций халькогенидов Bi-Sb, что и в работе [1]. Для приближенного определения производных величина ΔT_k составляла 0,1 K. Результаты расчета модуля приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Результаты расчета трехкаскадного модуля различными методами. Исходные данные для расчета: $T_0 = 300$ K, $T_3 = 210$ K. При 300 K термоэдс материалов ветви составляла $\left|\alpha_n^{(1)}\right| = \alpha_p^{(1)} = 210$ мкВ/K, $\left|\alpha_n^{(2)}\right| = \alpha_p^{(2)} = 230$ мкВ/K, $\left|\alpha_n^{(3)}\right| = \alpha_p^{(3)} = 250$ мкВ/K

Метод	T_1, K	T_2, K	J_1, А/см^2	J_2, А/см^2	J_3, А/см^2	μ
МП	261,98	232,37	22,73	19,27	15,13	16,87
ЭП	263,88	232,64	21,64	20,74	16,21	16,92

Из данных таблицы 1 видно, что оба метода, метод МП и метод ЭП, дают близкие по величине холодильного коэффициента результаты, хотя распределение температур отличается более заметно. Это связано с тем, что минимум теплового коэффициента как функция токов и промежуточных температур каскадов довольно пологий, поэтому погрешности расчета приводят к некоторым небольшим различиям в величине μ. Распределение тепловых коэффициентов по каскадам ясно из таблицы 2.

Таблица 2

Распределение тепловых коэффициентов по каскадам. Исходные данные те же, что и в таблице 1.

Метод	μ_1	μ_2	μ_3
МП	2,645	2,606	2,448
ЭП	2,487	2,741	2,481

Результаты работы показывают, что метод ЭП и метод МП дают совпадающие результаты. Небольшие различия в результатах не превышают экспериментальных погрешностей. По скорости и сложности вычислений оба метода приблизительно одинаковы. Преимуществом метода ЭП служит его бóльшая наглядность и более тесная связь с традиционными методами расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драбкин И.А, Ершова Л.Б. Сравнение различных подходов к оптимизации однокаскадных термоэлектрических модулей. Ibid.
2. Анатычук А.И., Семенюк В.А. Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов, Черновцы, «Прут», 1992, с. 159-177.
3. Драбкин И.А., Дашевский З.М., Термоэлектрики и их применение, С.-Петербург, 2000, с. 292-297.
4. Drabkin I.A., Ershova L.B.. *Proc. of the 3rd European Conference on Thermoelectrics*, Nancy, 2005, p. 178.